662. 位相幾何學ノ形式化(IV)

寺阪　英孝(阪大)

§8. 前節デ出シタ $D(A)$ ニ關スル關係式

$$D(D(A))=D(A),\quad D(A+B)=D(A)+D(B)$$

ヲ使フト

P_1: $A^{pp}=A^p$

P_2: $A\subset A^p$

P_3: $(A+B)^p=A^p+B^p$

ガ直グ出セル。P_2 ハ定義カラ明カデアルガ，P_1 ハ

$$A^p=A+D(A)$$

$$A^{pp}=A+D(A)+D(A+D(A))$$

$$=A+D(A)+(D(A)+D(D(A)))=A^p$$

P_3 ハ

$$(A+B)^p=A+B+D(A+B)$$

$$=A+B+D(A)+D(B)=A^p+B^p$$

次ニ $A^{acaca}=A^{\alpha}$ ニナラッテ A^{pcpcp} ハ一体如何ナモノカ調ベテ見ルト、先ヅ最モ都合ノヨイ場合デ開集合 U ガ常ニ N_σ (第一類ノ集合)デナイトキハ $D(A)$ ニ等シクナルノデアル。

(46) $A^{pcpcp}=D(A)$ (但シ凡テノ開集合 $U\bar{\in}N_\sigma$ ノ場合)

(証) $D(A)=U^c$: (a) U ハ $AU\in N_\sigma$ ナル最大開集合。

$$A^{p} = A + U^{c}$$

$$A^{pc} = A^{c} U$$

$D(A^{pc}) = V^{c}$: (b) V ハ $A^{pc}V = A^{c}UV \in N_{\sigma}$ ナル最大開集合

スルト $UV = UV(A+A^{c}) = AU \cdot V + \underset{(a)(b)}{A^{c}UV} \in N_{\sigma}$

開集合 UV ガ $\in N_{\sigma}$ トイフノハ假定ニヨッテ

$$UV = 0$$

ノ時ニ限ル。又 $UV = 0$ ナラバ (b) ノ式モ成立スルカラ

$UV = 0$ ガ成立スル最大開集合ノ V ハ (b) ノ V ト一致スル。

サテ

(i) V ガ $UV = 0$ ナル最大開集合ナラバ，元來

$UU^{ac} = 0$ (公理 A_2) ナル故 $U^{ac} \subset V$

(ii) 一方 $UV = 0 \underset{(ii)}{\longrightarrow} U^{a}V = 0 \sim V \subset U^{ac}$

(i) & (ii) $\longrightarrow V = U^{ac}$. 故ニ $V^{c} = U^{a}$

ヨッテ

$$D(A^{pc}) = U^{a}$$

$$\therefore \quad A^{pcp} = A^{c}U + U^{a} = U^{a}$$

$$\therefore \quad A^{pcpc} = U^{ac}$$

$D(A^{pcpc}) = W^{c}$ トスレバ W ハ $U^{ac}W \in N_{\sigma}$ ノ最大開集合

U^{ac} モ W モ開故 $U^{ac}W \in N_{\sigma}$ ハ $U^{ac}W = 0$ ト同ジデアル、サウスルト上述ノ (i), (ii) ト同様ニカンル最大ノ W ハ

$$W = U^{ac \cdot ac}$$

Uハ正則開集合（$U=U^{acac}$，§7，(40)参照）ナル故

$$W=U$$

$$\therefore\ A^{pcpcp}=U^{ac}+U^{c}=U^{c}=D(A) \text{——}$$

一般ノ場合、開集合デアッテ而モ $\in N_\alpha$ ナルモノガ存在スルトキハ少々面倒ニナル。今 $U\in N_\alpha$ ナル開集合ヲ凡テ加ヘルト，$D(A)$ ノ時ト同ジク *Banach* ノ定理ニヨッテ $\sum U$ モ $\in N_\alpha$．即チ $\in N_\alpha$ ナル最大ナ開集合ガアル譯デアルカラ、ソレヲ U_I トスル。

U_I: $U\in N_\alpha$ ナル最大ノ開集合

サウスルト

(47) $$A^{pcpcp}=D(A)+AU_I.$$

(証) 前ト大体同ジ方針デアルガ少々面倒ダカラ讀ムノヲ省略サレテモ差支ハナイ。タヾ筆者トシテハ技巧的ニ相當苦心ヲシタ所デモアリ、且ツ一應ハ証明ヲシテ置カナイト安心ガ出來兼ネルノデアル。扨テ

$$D(A)\ U^{c}:\begin{cases}(a) & U \text{ハ } AU\in N_\alpha \text{ ナル最大開集合}\\ (b) & U_I\in N_\alpha \text{ ナル故 } U_I\subset U\end{cases}$$

$$A^{p}=A+U^{c}\longrightarrow A^{pc}=A^{c}U$$

$$D(A^{pc})=V^{c}:\ \ (c)\ \ V\text{ハ } A^{pc}V=A^{c}UV\in N_\alpha$$

ナル最大開集合

スルト $UV=UV(A+A^{c})=AU\cdot V+A^{c}UV\underset{(a)(c)}{\in}N_\alpha$．

逆ニ $UV\in N_\alpha$ ナラバ $A^{c}UV\in N_\alpha$．ヨッテ V ハ $UV\in N_\alpha$ ナル最大開ノ V ト考ヘテ同ジデアル。所デコレハ

丁度 $UV = U_I$ ノ時デアル。即チ

$$D(A^{pc}) = V^c : (d)\ V ハ\ UV = U_I \text{ ナル最大開ノ} V.$$

$$A^{pcp} = A^c U + V^c$$

$$\therefore\quad A^{pcpc} = (A + U^c)V$$

$$D(A^{pcpc}) = W^c : (e)\ W ハ\ (A+U^c)V \cdot W \in N_\sim \text{ ナル最大開ノ} W.$$

ヨッテ

$$VW \underset{(4)}{=} (A + U^c)VW + (A+U^c)^c VW$$
$$= (A + U^c)VW + A^c UV \cdot W \underset{(e)(c)}{\in} N_\sim$$

逆ニ $VW \in N_\sim$ ナラバ (e) ノ式ヲ満足スルカラ W ハ

$$(f)\quad VW = U_I \text{ ナル最大開ノ} W.$$

ト考ヘテ同ジデアル。サウスルト (d), (f) カラ $U = W$ ガ出ルノデアル。

何者

(i) $U(V + WU^{ac}) = UV + W \cdot UV^{ac} \underset{(d)}{=} U_I + 0 = U_I$

ヨッテ (d) ニヨル V ノ最大性カラ $V + WU^{ac} \subset V$.

即チ WU^{ac} ハ V ニ含マレル。ヨッテ (§2, (5) ニヨリ) $V \cdot WU^{ac}$ ハ WU^{ac} ニ等シイ、スルト

$$WU^{ac} = V \cdot WU^{ac} = VW \cdot U^{ac} \underset{(f)}{=} U_I \cdot U^{ac} \underset{(b)}{\subset} UU^{ac}$$
$$\underset{A_2}{=} 0 \sim W \subset U^a \rightarrow W \subset U^{a \cdot cac} = U$$

(ii) $VU \underset{(d)}{=} U_I$ デアルガ、W ハ $VW = U_I$ ノ最大開ナル故 $U \subset W$

(i) & (ii) $\longrightarrow U = W$

ヨッテ　$D(A^{pcpc}) = U^c$

$$A^{pcpcp} = (A+U^c)V + U^c$$

サテ　$AV = AV(U+U^c) = A\cdot VU + AV\cdot U^c$

$$\underset{(d)}{=} AU_I + AV\cdot U^c$$

ヲ入レルト

$$A^{pcpcp} = U^c + AU_I = D(A) + AU_I \text{ ——}$$

A^{acaca} ヲ A^{α} ト書イタノニナラッテ

（定義）　A^{pcpcp} ヲ A^{π} トカク.

コトニスレバ

(48)　$A^{pcpcp} = A^{\pi} = D(A) + AU_I$

トナル。

次ニ a, α, p, π ノ相互関係ヲ出サウ。ソノ為メニ先ヅ A^a, A^{α} ノ一性質ヲ掲ゲテオカウ。

A^a：　$AU=0$ ナル最大開集合ヲUトスレバ　$A^a = U^c$.

A^{α}：　$AU \in N$（Nハ粗集合ヲ表ハス）ナル最大開集合ヲUトスレバ　$A^{\alpha} = U^c$

コレト

$D(A)$：　$AU \in N_{\sigma}$ ナル最大開集合ヲUトスレバ

$$D(A) = U^c$$

トヲ比較スレバ $A^a, A^{\alpha}, A^p, A^{\pi}$ ノ順ガ出ル譯デアル。

扨テ

（A^aノ証）　$AU=0 \longrightarrow A\sum U=0$ 故最大ノUガ存在スル。

ソコデ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & AA^{ac}=0\text{ ナル故、}U\text{ノ最大性カラ }A^{ac}\subset U\\ \text{(ii)} & AU=0\underset{(11)}{\longrightarrow}A^{a}U=0\sim U\subset A^{ac}\end{array}\right\}\to A^{a}=U^{c}$$

（A^{α}ノ証）

(i) $A\cdot A^{\alpha c}=AA^{aca\cdot cac}\subset AA^{aca}\subset A^{a}A^{aca}\underset{(21)}{\in}N$（粗集合）.

故ニUノ最大性カラ　$A^{\alpha c}\subset U$

(ii) 一般ニ(11)ト類似シタ次式が成立スル。

(49)　$(AU)^{\alpha}\supset A^{\alpha}U$　（Uハ開）

何者　$(AU)^{a}\supset A^{a}U\to(AU)^{a\cdot cac}\supset A^{a\cdot cac}U^{cac}$

$=A^{acac}U\to(AU)^{acaca}\supset(A^{acac}U)^{a}$

$\underset{(11)}{\supset}A^{acaca}U.$

コレヲ用キルト粗集合ハαヲトッタモノが0デアルカラ

$AU\in N\longrightarrow(AU)^{\alpha}=0\longrightarrow A^{\alpha}U=0\sim U\subset A^{\alpha c}$

(i) & (ii) $\longrightarrow A^{\alpha}=U^{c}$ ——

サテ

$AU=0\longrightarrow AU\in N,\to AU\in N_{\sim}$

ナルUハ順ニ大キクナルカラ

$A^{a}\supset A^{\alpha}\supset D(A)$

従ッテ

(50)　$A^{a}\supset A^{p}.$

(51)　$A^{\alpha}+AU_{I}\supset A^{\pi}$

更ニ前節$D(A)$ノ関係式中，可附番個ノ和ニ関スルモノ

$D(A_1+A_2+\cdots\cdots)=D(A_1)+D(A_2)+\cdots\cdots+N$,　N＝粗

ヲ使フト直チニ

(52) $$(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots)^p=(A_1^p+A_2^p+\cdots\cdots+A_n^p+\cdots\cdots)+N,$$
$$N^\alpha=0$$

ガ出ル。但シ $N^\alpha=0$ ハNガ粗集合ダトイフコトヲ示ス。又同ジ式カラ (48) ヲ使ヘバ

(53) $$(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots)^\pi$$
$$=(A_1^\pi+A_2^\pi+\cdots\cdots+A_n^\pi+\cdots\cdots)+N,\quad N^\alpha=0.$$

§9. 前節ノ式ヲ纏メルト

P_1: $A^{pp}=A^p$

P_2: $A\subset A^p$ ($AA^{pc}=0$)

P_3: $(A+B)^p=A^p+B^p$

P_4: $0^p=0$

$a>p$: $A^a\supset A^p$

$\alpha>\pi$: $A^\alpha+AU_I\supset A^\pi$. コヽニ $A^\pi=B+AU_I$,

$$B=B^\alpha\subset U_I^c$$

P_5: $(A_1+A_2+\cdots\cdots)^p=(A_1^p+A_2^p+\cdots\cdots)+N,\ N^\alpha=0$

(N ハ粗)

P_6: $(A_1+A_2+\cdots\cdots)^\pi=(A_1^\pi+A_2^\pi+\cdots\cdots)+N,\ N^\alpha=0$

最初ノ P_1, P_2, P_3 カラ §2, 3, 4 中ノ式デ a ヲ p ニ置換ヘタモノハ悉ク成立スルコトガ判ル。又 P_4 ハ A_4 ト $a>p$ トカラ出ルノデアルガ，コレハ $0^a=0$ ニ當ル譯ダカラ，§5ノ式モ亦全部成立スル譯デアル。即チ §5中ノ α ノ代リニ π ヲ入レタモノガ成立スル。

處デ

$$A^\alpha=0\ \text{即チ}\ A^{acaca}=0$$

ハ粗集合デアルガ

$$A^{\pi}=0 \quad 即チ \quad A^{pcpcp}=0$$

ハ何カト云フト，U_Iガ存在シナイトキハ簡単デ、AガNαナルコトヲ示シ、逆ニ$A\in N_\alpha$ナラバ$A^{\pi}=0$ニナル。然シU_Iガ存在スル場合ニハ

$$A^{\pi}=D(A)+AU_I$$

ダカラ$A^{\pi}=0$ナラバ成ル程Nαダガ、逆ニNαダカラト云ッテモ逆必ズシモ$A^{\pi}=0$ハ0トハ限ラヌ。コノ場合ニハ

$$A^{\pi}\subset U_I$$

ガNαデアルタメノ必要且ツ十分ナ條件ニナルノデアル。

ソコデ今 *Lefschetz* ガ *Topology* デ導入シタノニナラッテ *mod* U_I トイフ概念ヲ採用シテ見ヨウ。一般ニ《$\underset{Def.}{\sim}$》ハ《定義ニ從ツテ同意義》ト解スルコトトシ、次ノヨウニ定義スル：

I. $A=0\ (mod\ U_I) \underset{Def.}{\sim} A\subset U_I$

II. $A\subset B\ (mod\ U_I) \underset{Def.}{\sim} AB^c=0\ (mod\ U_I)$

III. $A=B\ (mod\ U_I) \underset{Def.}{\sim} AB^c=BA^c=0\ (mod\ U_I)$

コノ際IIIハ次ノヨウニ解釋スルト意味ガ明瞭ニナル。先ヅ

$$AB^c=BA^c=0\ (mod\ U_I)$$

ハIノ定義ニヨッテ

$$AB^c=U\subset U_I,\quad BA^c\subset V\subset U_I$$

デアル、ソコデ

$$A = A(B + B^c) = AB + AB^c = AB + U$$

$$B = B(A + A^c) = AB + BA^c = AB + V$$

トナルカラ、A, B ハ同ジ AB ナルモノ ニ U_I ノ部分集合ガ加ハッタモノダト云フコトガ判ル。

ツマリ $A = B \pmod{U_I}$ ハ A, B ガ U_I ノ部分集合ダケノ違ヒデ（ドイツ語デハ *bis auf* トイフ）等シイトカ，U_I ノ集合ヲ無視スレバ等シイトカイフコトヲ表ハシテヰルノデアル。ソウスルト

$$A = B \pmod{U_I},$$
$$B = C \pmod{U_I} \longrightarrow A = C \pmod{U_I}$$

ダトカ

$$A = B \pmod{U_I} \longrightarrow AC = BC \pmod{U_I}$$

ダトカ、ソノ外斯ウ云ッタ種類ノ式ガ出ルカラ、ソレヲ應用スルト §2, 3, 4, 5 ノ諸式ハ式ノ後ニ一々 $\pmod{U_I}$ ヲ附ケテモ尚成立スルコトニナルノデアル。

コノ記法ニ従ヘバ

$$A \in N_\alpha \rightleftarrows A^\pi = 0 \pmod{U_I} \underset{\text{Def.}}{\frown} A \overset{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I}$$

最右ノ式ハ略記法デ、既ニ §6 デナジミダッタ。§2 − 5 中デ α ヲ π ニ置換ヘ更ニ必要ガアレバ $\pmod{U_I}$ ヲ附ケタモノヲ（番号）$^\pi$ デ略記スル。ソウスルト $(20)^\pi$ ハ N_α ノ場合ニハ可附番個ノモノニツイテモ成立ツコトガ確カメラレル。

即チ

(54) $A_n \overset{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I}$ $n=1,2,\cdots\cdots \longrightarrow \sum A_n$
$\overset{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I}$

（N_σ ノ可附番個ノ和ハ N_σ デアル）

(証) $A_n \overset{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I} \longrightarrow (A_1+A_2+\cdots\cdots)^\pi$
$\underset{P_6}{=} (A_1^\pi + A_2^\pi + \cdots\cdots) + N = N \pmod{U_I}$

コヽニ $N^\alpha = 0 \underset{\alpha>\pi}{\longrightarrow} N^\pi = 0$

故ニ

$$(A_1+A_2+\cdots\cdots)^\pi \underset{(13)^\pi}{=} (A_1+A_2+\cdots\cdots)^{\pi\pi}$$

$$= N^\pi = 0 \pmod{U_I}$$

次ニ $(22)^\pi$ トシテハ

$(22)^\pi$ $$(A^p A^c)^\pi = (A^\pi A^c)^\pi = (A^\pi A^{cp})^\pi = (A^p A^{cp})^\pi$$

$$= (A^{cp} A)^\pi = (A^{c\pi} A)^\pi = (A^{c\pi} A^p)^\pi$$

ガ成立スル譯デアルガ、相集合ノ場合ニ正則集合ヲ定義シタト同様ニ

（定義） $(A^p A^{cp})^\pi = 0 \pmod{U_I}$ 従ツテ $(22)^\pi$ ノドレカ一ツガ $=0 \pmod{U_I}$ ナルAヲ p－正則ト云フ。所謂 *Baire* ノ性質ヲ有スル集合デアル。

p－正則集合ノ構造ヲ吟味スルタメニ $A^{cpc} \subset A$ ヲ利用シテ

(55) $A = AA^{cpc} + AA^{cp} = A^{cpc} + AA^{cp}$

トオケバ AA^{cp} ハ $(22)^{\pi}$ カラ假定ニヨッテ N_α デアル。又 A^{cpc} ハ先ヅ $(37)^{\pi}$ ニヨッテ（A, a, α ヲ A^c, p, π デ置換ヘル）

$$A^{cp} = A^{c\pi} + A^{cp}A^{c\pi c}$$

第二項ハコノ際 N_α トナル。（(37) デハ雑デアッタ）、第一項ハ $\alpha > \pi$ 式デ示シタ如ク正則開集合ニ N_α ガ加ハッタモノデアル、ヨッテ (55) ニ入レレバ

$$(56) \quad A = UP^c + Q$$

トナル、コヽニ U ハ正則開集合，P, Q ハ N_α デアッテ、*Kuratowski* ノ定義デ *Baire* ノ性質ヲモツ集合ト同ジナコトガ判ッタ。次ニ

$$(57)\begin{cases} p-\text{正則集合ノ可附番個ノ和ハ亦}\ p\ \text{正則ニナル。} \\ A_n{}^{p} A_n{}^{cp} \overset{\pi}{\approx} 0\ (\mathrm{mod}\ U_I) \to (\sum A_n)^p (\sum A_n)^{cp} \\ \qquad \overset{\pi}{\approx} 0\ (\mathrm{mod}\ U_I) \end{cases}$$

（證）p－正則ヲ $(A_n A_n{}^{cp})^{\pi} = 0\ (\mathrm{mod}\ U_I)$ ノ形ニトルト

$$(\sum A_n)(\sum A_n)^{cp} = \sum A_n (\prod A_n^c)^p \subset \sum A_n A_n{}^{cp} \underset{(54)}{\overset{\pi}{\approx}} 0\ (\mathrm{mod}\ U_I)$$

コノ外色々出ルケレドモ、判リテヰル定理ヲ彼モ出ル、是モ出ルデハ紙ガナイカラ此ノ位ニシテ、次ハ實函數論ノ形式化ト云フ、飛ンデモナイ累論ニ移ラウト思フ。